Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 31. јул 2025.

МАТЕМАТИКА (60)

1. Упростити израз $\dfrac{(x+2)^2-4x^2}{9x^2+12x+4}$, а затим израчунати његову вредност за $x=\sqrt[3]{\sqrt{0.000064}}$.

2. (а) Решити квадратну једначину $2x^2-21x+52=0$

   (б) Одредити дужине страница правоугаоника чији је обим $21m$ а површина $26m^2$.

3. Решити дати систем експоненцијалних једначина $\begin{cases} 3^x - 2^y = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases}$

4. Ако је $\sin x - \cos x = a$ изразити у зависности од a следеће изразе: $\sin x \cdot \cos x$ и $\cos^2 2x$.

Решења:

1. Бројилац факторишемо применом формуле за разлику квадрата, а именилац применом формуле за квадрат збира:

$$\frac{(x+2)^2-4x^2}{9x^2+12x+4}=\frac{(x+2+2x)(x+2-2x)}{(3x+2)^2}=\frac{(3x+2)(2-x)}{(3x+2)^2}=\frac{2-x}{3x+2}.$$

За $x=\sqrt[3]{\sqrt{0.000064}}=\sqrt[6]{\frac{64}{1000000}}=\sqrt[6]{\frac{2^6}{10^6}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ израз има вредност

$$\frac{2-\frac{1}{5}}{3\cdot\frac{1}{5}+2}=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{13}{5}}=\frac{9}{13}.$$

2. (а) Ову квадратну једначину решавамо на основу познате формуле: $x_{1,2}=\dfrac{21\pm\sqrt{441-416}}{4}$ одакле следи $x_1=\dfrac{13}{2}$, $x_2=4$.

   (б) Ако странице правоугаоника обележимо са a и b, онда услови задатка дају систем две једначине: $2a+2b=21$ и $a\cdot b=26$. Прва једначина система је линеарна, па се на основу ње може спровести смена промењљиве у другој једначини, нпр $b=\frac{1}{2}(21-2a)$, што другу једначину своди на квадратну једначину из првог дела задатка. Дакле, странице правоугаоника су дугачке $6.5m$ и $4m$.

3. Приметимо да је $\left(3^{\frac{x}{2}}\right)^2=3^x$ и $\left(2^{\frac{y}{2}}\right)^2=2^y$. Уводећи смену $A=3^{\frac{x}{2}}$, $B=2^{\frac{y}{2}}$, задати систем се трансформише, и очигледно се прва једначина може поделити другом

$$\begin{cases}A^2-B^2=77\\ A-B=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(A-B)(A+B)=77\\ A-B=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=11\\ A-B=7\end{cases}$$

Добијен је линеарни систем чија су решења $A=9$ и $B=2$, одакле следи $\frac{x}{2}=2$ и $\frac{y}{2}=1$, односно $x=4$ и $y=2$.

4. Уз примену основног тригонометријског идентитета, квадрирањем дате једнакости $\sin x-\cos x=a$, се добија $1-2\sin x\cdot\cos x=a^2$, одакле следи $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1-a^2}{2}$.
На основу формуле за косинус двоструког угла, разлике квадрата и квадрата бинома, добија се

$$\begin{aligned}\cos^2 2x&=(\cos 2x)^2=\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2=(\cos x-\sin x)^2(\cos x+\sin x)^2\\&=a^2(1+2\cos x\sin x)=a^2\left(1+2\cdot\frac{1-a^2}{2}\right)=a^2(2-a^2)=2a^2-a^4.\end{aligned}$$

Универзитет у Новом Саду
Технички факултет "Михајло Пупин" Зрењанин

Пријемни испит, 31. јул 2025.

МАТЕМАТИКА (30, РИ)

1. Решити:

   (а) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

   (б) $4x^2 - 8x + 3 \leq 0$

2. Решити по x дату логаритамску једначину $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3^x - 1}{16}\right) = \frac{3}{4}$.

3. Ако је $\sin x = \frac{1}{3}$ израчунати $\sin 3x$.

Решења:

1. (а) Директном применом формуле за решавање квадратне једначине добијају се решења
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} = \frac{8 \pm 4}{8} \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$
   (б) Решења претходне једначине су нуле функције, односно тачке пресека одговарајуће параболе са x-осом. Како је уз x^2 позитиван број, функција има минималну вредност (теме параболе је са доње стране) и негативна је између нула функције. Дакле, скуп решења неједначине је $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

2. Користећи правила $\log_{a^b} c = \frac{1}{b}\log_a c$ и $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, трансформишемо дату једначину
$$\log_4(3^x-1)\cdot(-1)\log_4\left(\frac{3^x-1}{16}\right) = \frac{3}{4}$$
$$-\log_4(3^x-1)\cdot(\log_4(3^x-1)-\log_4 16) = \frac{3}{4}$$
$$-\log_4^2(3^x-1) + 2\log_4(3^x-1) = \frac{3}{4} \qquad |\cdot(-4).$$
Уводећи смену $\log_4(3^x-1) = t$, добија се једначина чија су решења $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$ (види задатак $1(a)$). Враћањем смене се добијају решења по x:

$\log_4(3^x-1) = \frac{1}{2}$	$\log_4(3^x-1) = \frac{3}{2}$
$3^x - 1 = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$	$3^x - 1 = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
$3^x = 3$	$3^x = 9$
$x = 1,$	$x = 2.$

Скуп решења полазне једначине је $\{1, 2\}$.

3. На основу основног тригонометријског идентитета рачунамо
$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
Примењујемо формулу за синус двоструког угла
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$
и опет рачунамо
$$\cos 2x = \sqrt{1-\sin^2 2x} = \sqrt{1-\frac{32}{81}} = \frac{7}{9}.$$
Коначно рачунамо тражену вредност применом адиционе формуле
$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cdot\cos x + \cos 2x\cdot\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{16}{27} + \frac{7}{27} = \frac{23}{27}.$$